

学校编码: 10384
学号: 200223037

分类号_____密级_____
UDC _____

厦 门 大 学
硕 士 学 位 论 文

不完全信息情况下的期权定价研究
Option Pricing Theories Under the Condition of
Incomplete Information

杨靖三

指导教师姓名: 李时银 副教授
申请学位级别: 硕 士 学 位
专 业 名 称: 概率论与数理统计
论文提交日期: 2005 年 5 月
论文答辩时间: 2005 年 6 月
学位授予单位: 厦 门 大 学
学位授予日期: 2005 年 6 月

答辩委员会主席: _____
评 阅 人: _____

2005 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年 月 日

摘 要

期权是金融衍生产品的一种重要形式,其价值依赖于标的资产的价格变动。期权定价的过程,一般是对金融市场做一些合理的假设,进而给出标的资产的价格变动模型,在给定的模型下去寻求期权的价格公式。期权定价在完全信息情况下已经有了几种比较成熟的理论,正逐步向不完全信息情况发展。本文的目标是在不完全信息情况下,寻求建立在效用函数上的均衡期权价格公式。首先简单介绍了金融衍生工具的发展概况和效用函数理论,然后介绍了完全信息情况下的几种期权定价理论:Black-Scholes 期权价格公式,现代鞅方法定价理论和随机波动率模型下的期权定价理论。论文第三章,在不完全信息情况下建立一种代理经济人模型,此模型假设股票红利遵循几何布朗运动,但其期望均值是一个未知常数,投资者只能根据自己掌握的信息和历史数据去估计它。在这种假设下我们分别在对数效用和幂效用函数理论下,寻求均衡的资产价格和折现因子,最后给出均衡的欧式期权价格公式。在最后一章,对得到的结论进行了讨论。

关键词: 不完全信息; 效用函数; 均衡价格.

Abstract

Option is one of the most important types of financial derivative securities whose value depends on the values of the underlying assets. The process of the option pricing, due to some reasonable assumption of the financial market, then give the model for the price of object property, under the model look for the price formula of the option. The option pricing has already had several theories under the condition of complete information, just gradually to incomplete information. The text target is under the condition of incompletely information, looking for the balanced option price formula under the utility function. At first, introduced the finance development situation and the effect function theories, then introduced a few option pricing theories under complete information circumstance: The Black-Scholes option price formula, the modern martingale method pricing theories and the option pricing theories under the random motion rate model. The thesis chapter 3, build up a economic person's model under the condition of incomplete information. This model supposes stock dividend follows the geometric brown motion, the expected dividend is a constant, but we don't know it. The investor only can estimate it according to the information and the history data that he possessed. Under this kind of assumption, we distinguish under the logarithmic utility and the power utility function theories, looking for the balanced asset price and the discount function, then give the balanced European option price formula. At the last chapter, we carry on the discussion to the conclusion.

Key word: incomplete information; utility function; balanced price

目 录

第一章 引言.....	1
§ 1.1 金融衍生工具概述.....	1
§ 1.2 效用函数理论介绍.....	7
1. 2. 1 效用函数.....	7
1. 2. 2 期望效用.....	8
1. 2. 3 风险偏好与效用选择.....	9
§1.3 不完全信息经济学.....	11
第二章 几种主要的期权定价理论.....	12
§ 2.1 Black-Scholes 定价理论.....	14
§ 2.2 鞅方法期权定价理论.....	17
§ 2.3 随机波动率模型下的期权定价.....	20
第三章 不完全信息下的效用函数期权定价理论.....	23
§ 3.1 建立模型.....	23
§ 3.2 一般效用函数及其均衡理论.....	29
§ 3.3 对数效用函数理论下的欧式期权定价.....	33
§ 3.4 幂效用函数理论下的欧式期权定价.....	37
第四章 总结.....	44
参考文献.....	46
后记.....	48

Contents

Abstract(Chinese)	I
Abstract(Englishi)	II
Chapter 1 Preface	1
§1.1Finances derivativesecurits summary.....	1
§1.2 Utility function theories introduction.....	7
1.2.1 Utility function.....	7
1.2.2 Expect utility	8
1.2.3 The risk hobby and utility choice.....	9
§1.3 The incomplete information economics	11
Chapter 2 A few main option pricing theories.....	12
§2.1 Blacks- Scholes pricing theories.....	14
§2.2 Option pricing theories of martingale theory.	17
§2.3 Option pricing theories under the random motion rate model	20
Chapter 3 Option pricing theories under the condition of incomplete information.....	23
§3.1 Establish the model	23
§3.2The general utility functions and its balanced theories	29
§3.3 Europe option pricing under the logarithmic utility function.....	33
§3.4 Europe option pricing under the power utility function	37
Chapter 4 A summary.....	44
Reference	46
Postscript	48

第一章 引言

§ 1.1 金融衍生工具概述

金融衍生工具 (derivative instruments, 以下简称衍生工具) 又称为金融衍生产品 (derivatives) 或金融衍生证券 (derivative securities), 它是一类新型的金融工具, 其价格或投资回报最终取决于另一种资产, 即所谓标的资产 (underlying asset) 的价格。这就是说, 金融衍生工具的价值是由标的资产价值衍生 (derivatives) 而成的。其中, 用来作为标的资产的可以是债券, 股票, 货币等基础金融工具, 也可以是其他实物资产, 也可以是金融衍生工具本身。

远期合同、期货合同和期权合同是三种最基本的衍生工具^[1]。

(1) 远期合同 (forward contracts)。

所谓远期合同, 是合同的双方关于在未来一个特定的时间和地点进行标的资产买卖的一项协议。其中, 同意买入标的资产的一方称为远期合同的多头 (long position, 即买方), 而同意卖出标的资产的另一方称为远期合同的空头 (short position, 即卖方)。

一个远期合同具有以下三个重要参数: 第一, 交割价格 (delivery price), 又称为远期价格 (forward price), 即合同双方约定的标的资产买卖交易的价格。第二, 交割日 (delivery data), 又称为到期日, 即合同双方约定的进行标的资产交割的确切时间。第三, 交割数量 (delivery quantity), 即合同双方约定的实际交割标的资产的数量。

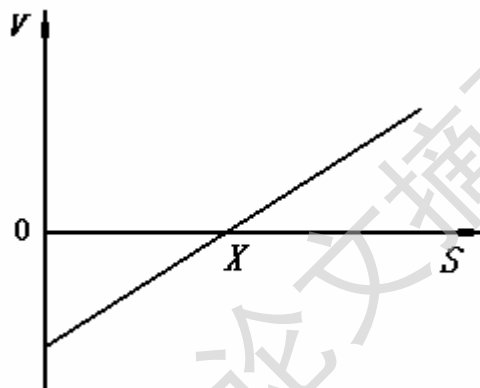
在远期合同的交割日, 合同的空头按交割数量将标的资产交给合同的多头, 而合同的多头则需按交割价格向空头方支付现金。对于远期合同交易来说, 在到期日进行标的资产实际交割之前, 合同双方均不发生任何的

现金收支。

一般说来,若记交割日的资产市场价格为 S ,远期合同的交割价格为 X ,交割数量为 Q ,则远期合同的价值 V 可以表示为

$$V=(S-X)Q$$

如果 $S>X$, 则远期合同的价值为正; 反之, 如果 $S<X$, 则远期合同的价值为负。如下图所示:



(2) 期货合同 (future contracts)。

从合同的基本内容上看, 期货合同与远期合同十分相似, 即它也是合同双方关于在未来一个特定的时间和地点进行标的资产买卖的一项协议。其中, 同意买入标的资产的一方称为期货合同的多头, 而同意卖出标的资产的另一方称为期货合同的空头。期货合同与远期合同相比存在以下主要区别:

第一, 期货合同是标准化的金融工具, 期货合同的交易通常是在有组织的期货交易所内进行的。而远期合同的交易一般没有固定的交易场地, 主要是在店头市场上进行交易。

第二, 期货合同的清算通过期货清算所 (clearing house) 完成, 清算所作为独立的第三方, 充当合同双方的中间人, 从而使得信用风险减小到

最低限度。

第三，期货合同交易双方的损益是逐日清算（marketed-to-market）的。具体地说，在期货合同交易之初，合同双方都必须在期货交易所那里存入一定的初始保证金。此后，在每一个交易日结束时，交易所都要根据标的资产市场价格的变化计算合同双方当日实现的收益或损失，其金额从损失方的保证金帐户中扣除，转入收入方的保证金帐户。因此，期货合同双方的收益或损失是逐日体现的。与此相反，对于远期合同的双方来讲，既无保证金要求，在交割日之前也不发生任何现金收支。

第四，期货市场受到金融监管当局和有关法规的管制，而远期市场则不在监管的范畴之内。

(3) 期权合同（option contracts）

期权合同给予合同的持有者（俗称多头，long position）在一定的时间内，以事先确定的价格，从对手那里（俗称空头，short position）买进或卖出某种资产的权利（但可以放弃此权利或者说不负有义务）。期权合同可分为两大类型，即买权（call option，又称看涨期权）和卖权（put option，又称看跌期权）。其中买入期权赋予多头在规定的时间内，以事先预定的价格从空头那里购买一定数量的标的资产的权利；卖出期权则赋予卖权的多头在规定的时间内，以事先预定的价格向卖权的空头卖出一定数量的标的资产的权利。期权按照执行日期又可以分为欧式期权和美式期权。欧式期权的持有者只能在合同规定的到期日（expiry date）以确定的价格（称为执行价 exercise price）或敲定价（strike price）买卖某种确定的资产，而美式期权的持有者则可以自行决定在未来的某一段时间范围内某一时间以确定的价格买卖标的资产，期权合同的空头承担着执行合约的义务，当合同的多头选择买入或卖出资产时，出售方必须卖出或买入资产。因此参与期权交易的投资者分为四种类型或称为四种头寸：（1）买入期权的多

(2) 卖出期权的多头 (3) 买入期权的空头 (4) 卖出期权的空头

签定期权合同时明确以下几点:

第一, 标的资产 (underlying asset), 即期权合同的多头执行权利时所买入或卖出的资产。可供选择的标的资产种类很多, 不仅包括股票、债券、货币、利率等金融资产, 也可以是黄金及其他一些商品。

第二, 执行价格(exercise price or strike price), 即期权合同所规定的标的资产买入或卖出价格。执行价格在签定期权合同时就已经固定, 不再随标的资产市场价格的变化而变化。

第三, 到期日(expiration date), 即期权合同所规定的有效期限或合同多头行使权利的的时间。对于美式期权, 多头可以在到期日之前任一天行使权利。

第四, 期权费(option premium), 即期权的多头为得到买入或卖出标的资产的权利, 向空头所支付的一定费用, 也就是期权合同的价格。本论文在后面介绍当前几种主要的期权定价理论, 并给出在不完全信息下, 建立在效用函数理论下的欧式期权定价。

根据上述说明, 对于一个期权合同用 X 表示欧式期权的执行价 (敲定价), 设 S_T 为标的资产在到期日 T 的市场价格。若 $S_T > X$, 买入期权的多头将会选择执行购买标的资产, 他以 X 元的代价获得价值为 S_T 元的资产, 因而多头从买入期权中得到的收益是 $S_T - X$ 。若 $S_T \leq X$ 多头将放弃执行期权的权利。故欧式买入期权多头的到期收益为

$$\max(S_T - X, 0)$$

类似地, 欧式卖出期权的多头的到期收益为

$$\max(X - S_T, 0)$$

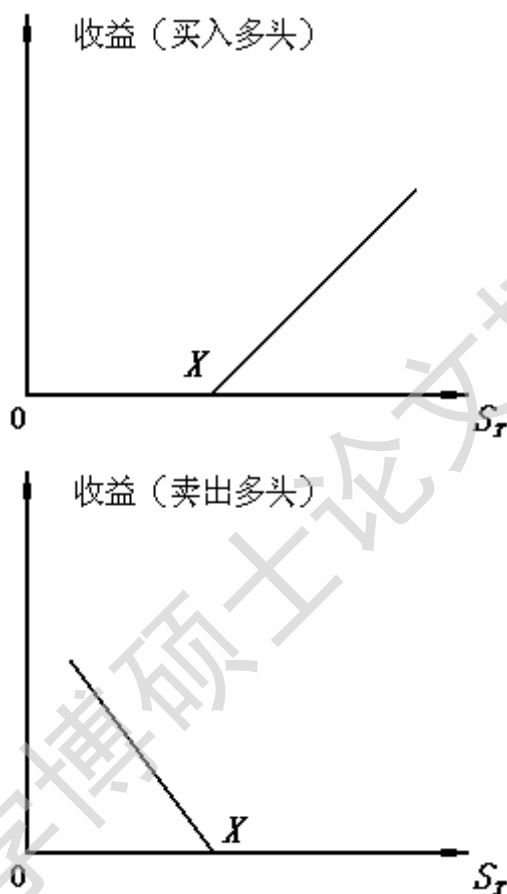
因为多头的收益就是空头的损失, 或者反过来 (这是一种零和游戏), 故欧式买入期权空头的收益为

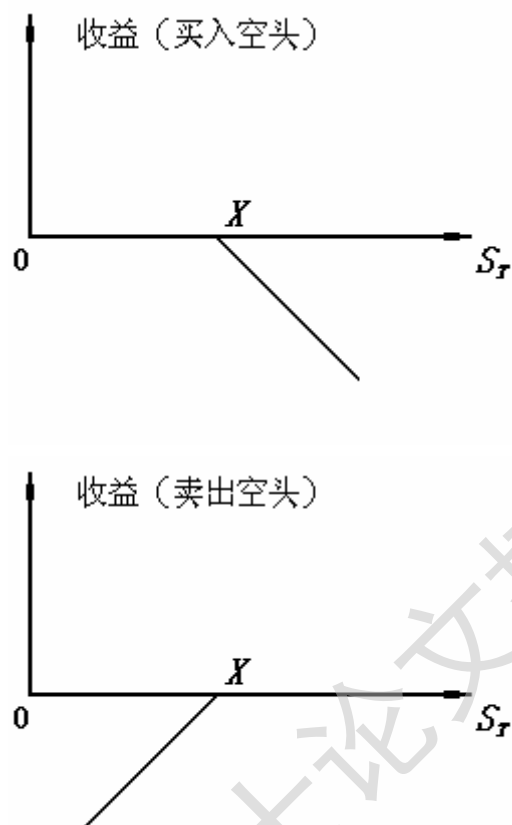
$$-\max(S_T - X, 0) = \min(X - S_T, 0)$$

欧式卖出期权空头的收益为

$$-\max(X - S_T, 0) = \min(S_T - X, 0)$$

上述四种头寸的到期收益图示如下





以上述三种合同为主的金融衍生产品最主要和基本的功能是实现风险的转移,从而为投资者提供套期保值的有效工具和途径。金融衍生产品在其市场上的不断交易可以实现风险转移目的。在金融衍生产品市场上,一方实现的收益就是另一投资方的损失,因此金融衍生工具市场将现货市场的风险从不愿意承担该风险的一方,转向愿意接受它的另一方。金融衍生产品的出现,提高了金融市场的效率,提供了更好的风险管理方法。

§ 1.2 效用函数理论介绍

1. 2. 1 效用函数

每种商品以及一些商品的组合都可以给人们带来一定的满足。依照序数效用理论,人们对商品的满足程度可以由偏好来描述。假定当前可供消费者进行消费的商品的所有组合由 X 加以表示。比如,以两种商品组合为例。假定消费者消费 A 和 B 两种商品,如果用第一个指标表示对商品 A 的消费量,而用第二个指标表示对商品 B 的消费量,那么 $x = (x_1, x_2)$ 与 $y = (y_1, y_2)$ 就是两种商品 A 和 B 构成的两个商品组合。从理论上讲,任何大于、等于零的商品或商品组合都是可供消费者选择的,因此通常假定 X 由那些非负数量的商品组合所构成。

依照序数效用理论的假定,消费者可以对 X 中的所有组合依照一定的规则排定顺序。在西方经济学中我们用 \geq 表示消费者的偏好。如果 x 和 y 是 X 中的两种商品组合,若消费者认为 x 不比 y 差,就表示成 $x \geq y$ 。为了更好的表达消费者消费某种商品所带来的满足程度,经济学中定义了如下效用函数^[18]: 假定 $u(x)$ 是定义在 X 上的一个正实数值函数,如果对于中的任意两个商品组合 x 和 y , $x \geq y$ 的充分必要条件是 $u(x) \geq u(y)$ 。那么就称函数 $u(x)$ 是消费者的效用函数。因此,效用是从偏好关系派生出来的,效用函数是偏好关系的一种度量。

著名数学家伯努利从彼得堡悖论得到启发,首先提出财富的效用这一思想。并从研究中提出效用的增加是随财富的增加而递减的,用数学语言描述就是^[17]: 效用 $u(x)$ 是财富 x 的函数, x 越大它也越大,也就是 $u(x)$ 是 x 的增函数,即 $\frac{du(x)}{dx} > 0$; 另一方面,它的增加值是递减的,也就是

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} < 0。$$

第二次世界大战后，著名的数学家，电脑的创始人冯诺依曼（Von Neumann）和经济学家摩根斯顿（Morgenstern）合写了一本书^[3]：博弈论和经济行为（theory of games and economic behavior），第一次提出了确定效用函数的公理系统，用严密的数学方式来讨论这一问题。从此以后，经济学界对供给需求关系分析中的效用函数有了比较明确的表达。常用的效用函数有对数效用函数 $u(x)=\ln x$ ，幂效用函数 $u(x)=x^\alpha/\alpha$ 等。

经济学中，消费者被假定为在经济上是理性的。在消费商品时，消费者总试图在既定的收入约束条件下获得尽可能大的满足，即追求效用最大化。消费者的效用最大化可以看成是消费者在收入所允许的范围内选择适当的商品组合，使得自身的效用等级达到最大的过程。在其他条件不变的情况下，当消费者获得最大满足时，他将保持这种状态不变，此时消费者处于均衡。消费者均衡是在既定的收入约束范围内选择商品组合，实现效用最大化的状态，用公式表达为

$$\begin{cases} \max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2) \\ s.t. p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \end{cases} \quad (1.1)$$

1. 2. 2 期望效用

与确定性条件下的分析相比，对消费者在不确定性条件下进行选择时的行为给予的基本限定很难进行数学运算，因此经济学家希望以一个效用函数来体现消费者的选择偏好。下面的定理提供了这种可能。

定理（冯·诺伊曼-莫根斯坦定理） 在公理 1-4^[18]的假定条件下，一定存在着定义在集合 Y 上的一个实值函数，满足下列条件

(1) $y^1 > y^2$, 当且仅当 $u(y^1) > u(y^2)$

(2) 对任意的 $x_1, x_2, \dots, x_s \in X$ 和 $0 \leq \pi_i \leq 1 (i=1, 2, \dots, s)$, 并且 $\sum_{i=1}^s \pi_i = 1$,

有

$$u(\pi_1, \dots, \pi_s; x_1, \dots, x_s) = \pi_1 u(x_1) + \dots + \pi_s u(x_s) \quad (1.2)$$

上述定理说明, 在不确定条件下, 消费者的偏好关系仍然可以由一个效用函数加以表示, 消费者持有或消费一份不确定权益的效用值是这个权益的所有结果的效用值的加权平均值, 其中权重是这些结果出现的可能性。即加权平均值是对应的效用值的预期值或期望值。

由上述预期效用定理, 就可以把不确定性问题的分析转化为对确定性问题的分析。对于不确定条件下的消费者, 假定他们的目标是效用最大化。为了简单起见, 假定未定权益只有两种结果, 即 $y = (\pi; x_1, x_2)$ 。这样, 消费者的效用最大化行为可以表述为

$$\max_y u(y) = \max_y [\pi u(x_1) + (1-\pi)u(x_2)] \quad (1.3)$$

1. 2. 3 风险偏好与效用选择

当消费者在不确定性条件下进行选择时, 他的某种行为就具有一定的风险。选择哪种组合取决于消费者对待风险的态度。对待风险的态度有厌恶、中性、喜爱三种。一般的来讲

1. 若效用函数是凹函数即

$$u(Ex) > Eu(x),$$

则相应于风险厌恶者;

2. 若效用函数是凸函数即

$$u(Ex) < Eu(x),$$

则相应于风险爱好者；

3. 若效用函数满足 $u(Ex) = Eu(x)$ ，则相应于风险中性的人。

因此人们选择不同的效用函数时，实际上就反映了他对风险的态度。如果效用函数是有一、二阶导数的一元函数，定义

$$\lambda(x) = -u''(x)/u'(x),$$

$\lambda(x)$ 是阿罗-普雷特 (Arrow-Pratt) 的风险厌恶度量，用 $\lambda(x)$ 的符号就可以判断对风险的态度，其结论是：

$$\lambda(x) > 0, \quad \text{厌恶风险,}$$

$$\lambda(x) < 0, \quad \text{爱好风险,}$$

$$\lambda(x) = 0, \quad \text{风险中性.}$$

由上面这个结论可以得到：（1）对于对数效用函数 $u(x) = \ln x$ 来讲

$$\lambda(x) = -\frac{(\ln x)''}{(\ln x)'} = \frac{1}{x} > 0, \quad \text{所以它对应厌恶风险；（2）对于幂效用函数}$$

$$u(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \quad \lambda(x) = -\frac{(\frac{x^\alpha}{\alpha})''}{(\frac{x^\alpha}{\alpha})'} = \frac{1-\alpha}{x}. \quad \text{因此当 } \alpha < 1 \text{ 时, } \lambda(x) > 0, \text{ 表示厌恶}$$

风险；当 $\alpha > 1$ 时, $\lambda(x) < 0$, 表示爱好风险；当 $\alpha = 1$ 时, $\lambda(x) = 0$, 表示风险中性。

选择什么效用函数，要根据消费者个人的风险偏好来决定。在后面的几章，我们将在不完全信息下进一步研究对数效用函数和幂效用函数在期权定价中的应用。

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库